数理解析研究所講究録
497巻 1983年 205-247

有限個の軌道をもつ単純線型代数群の表現について

筑波大　数学系
木村　達雄

序文　すべて複素数体$\mathbb{C}$上で考える。単純代数群Gの有限次元有理表現$\rho : G \to GL(V)$は既約表現ρ_i $(i=1,\cdots,\ell)$の直和$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_\ell$, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$に分解するが，本論では，$\rho$と各既約成分$V_i$ $(i=1,\cdots,\ell)$のスカラー倍との合成により，Vが有限個の軌道に分解するものをすべて決定し，その軌道分解を具体的に与える。本質的に，単純代数群の概均質ベクトル空間の分類の結果を使う。　尚，ρが既約($\ell = 1$)の場合は，T. Kimura と V. Kac が独立にやっており，([1] [5], [7], [8]) この場合は省く。以下では$\ell \geq 2$のみ扱う。

準備　有限個の軌道に分解すれば，少なくとも一つの軌道(実は丁度一つ)の次元は$\dim V$に一致するから triplet $(GL(1)^\ell \times G, \rho, V)$ (但し$GL(1)^\ell$は各既約成分にスカラー倍として作用)は概均質ベクトル空間でなければならない。このような単純群とスカラー倍の合成による概均質ベクトル空間は分類が完成して

いる。

定理（T. Kimura([4])）単純代数群 G とその有限次元有理表現 $\rho : G \to GL(V)$ で，各既約成分のスカラー倍との合成が概均質になるのは次の場合に限る。（$\rho \neq$ 既約，即ち $\ell \geqq 2$ とする。）

(1) $SL(n)$
$\underbrace{\square + \cdots + \square}_{k} + \square^{(*)}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ $(n \geqq 2)$

（但し $\square$ は $x \mapsto Ax$ $(A \in SL(n),\ x \in \mathbb{C}^n)$，$\square^*$ は $\square$ の dual，即ち $x \mapsto {}^tA^{-1}x$ $(x \in \mathbb{C}^n)$，$\square^{(*)}$ は $\square$ または $\square^*$ の意味。）

(2) $SL(n)$
日 $+ \underbrace{\square^{(*)} + \cdots + \square^{(*)}}_{k}$ $(1 \leqq k \leqq 3)$ $(n \geqq 4)$，但し $SL(2m+1)$ 日 $+\square+\square+\square^*$ を除く。

（日は n 次歪対称行列の空間に $X \mapsto AX{}^tA$ $({}^tX = -X)$ と作用する表現．言いかえると $u_1, \cdots, u_n$ を $\mathbb{C}^n$ の base とするとき $V = \sum_{i<j} \mathbb{C}\, u_i \wedge u_j$ に $SL(n)$ を，$\rho_2(g)(\sum x_{ij} u_i \wedge u_j) = \sum x_{ij}\, \rho_1(g)u_i \wedge \rho_1(g)u_j$ $(\rho_1 = \square)$ と作用させたもの.）

(3) $SL(2m+1)$
日 $+$ 日 $(m \geqq 2)$ （日 $+$ 日* は non P.V.）

(4) $SL(n)$
$\square\square + \square^{(*)}$ （$\square\square$ は n 次対称行列の空間に $X \mapsto AX{}^tA$ $(A \in SL(n),\ {}^tX = X)$ と作用させたもの.）

(5) $SL(n)$
目 $+ \square^{(*)}$ $(n = 6, 7)$ （目は $SL(n)$ が 3-forms の空間 $V = \sum_{i<j<k} \mathbb{C}\, u_i \wedge u_j \wedge u_k$ に作用したもの.）

(6) $SL(6)$
目＋□＋□ （$SL(6)$ 目＋□＋□* は non P.V.）

(7) $Sp(n)$
$\underbrace{\square + \cdots + \square}_{\ell}$ （$2 \leq \ell \leq 3$, Sp では □＝□*）

(8) $Spin(n)$
(半)スピン表現＋ベクトル表現 （$n = 7, 8, 10, 12$）

（$n=3,5,6$ でもよいが，$n=3$ は(4)の$n=2$，$n=6$ は(2)の$n=4$の場合と同値、$n=5$の場合は次の(9)と同値、$n=4$ は単純群ではないので，省く．）

(9) $Sp(2)$
日＋□

(10) $Sp(3)$
目＋□

(11) $Spin(10)$
偶半スピン表現＋偶半スピン表現 （偶半スピン表現＋奇半スピン表現は non P.V. $Spin(10)$の場合奇〃は偶〃の dual．）

さて，これ等のなかで有限個の軌道をもつものを決定する。

Lemma 1. ([6])，(reductive とは限らない)群 G と表現 $\rho: G \to GL(V)$ 及びその dual $\rho^*: G \to GL(V^*)$ を考える。その時，(G, ρ, V) が有限個の軌道をもつ $\Longleftrightarrow$ (G, ρ^*, V^*) が有限個の軌道をもつ。そのとき軌道は1対1に対応する。

証明.（[6] の別証を与えよう。） $\mathfrak{g}$ を G のリー環，$d\rho$ を ρ の微分とする。$V \times V^*$ 内の Zariski-closed set W を

$$W \overset{\mathrm{def}}{=} \{(x, y) \in V \times V^* ;\ \langle d\rho(A)x, y\rangle = 0 \text{ for all } A \in \mathfrak{g}\}$$

と定める。 V の点 x に対し，V^* の部分空間 V_x^*（x の conormal vector space とよばれる）を，$V_x^* = \{y \in V^* ; \langle d\rho(A)x, y\rangle = 0$ for all $A \in \mathfrak{g}\}$ と定める。V 内の G-軌道 S に対して，その conormal bundle $T_S^* V$ を $\{(x, y) \in V \times V^* ;\ x \in S,\ y \in V_x^*\}$ の $V \times V^*$ における Zariski-closure として定義する。同様に V^* 内の G-軌道 S^* についても $T_{S^*}^* V^*$ を定義する。これは n 次元の algebraic set（$n = \dim V$）である。定義から

$$(*) \quad W = \bigcup_{x_0 \in V} T^*_{\rho(G)x_0} V = \bigcup_{y_0 \in V^*} T^*_{\rho^*(G)y_0} V^*$$

となる。 $\langle d\rho(A)x, y\rangle = -\langle x, d\rho^*(A)y\rangle$ ゆえ，W は V と V^* に関して対称であることに注意する。然らば，Lemma をいうには

(G, ρ, V) が有限軌道をもつ $\iff \dim W = n$，を示せばよい。

$\Rightarrow$）は conormal bundle の次元が n ゆえ $(*)$ より明らか。

$\Leftarrow$）$T^*_{\rho(G)x_0} V$ の n 次元の既約成分を $\Lambda_{\rho(G)x_0}$ とすると，$\dim W = n$ より，$\Lambda_{\rho(G)x_0}$ は，W の既約成分，従って有限個でなければならない。

さて $\dim W = n$ のとき，$T^*_{\rho(G)x_0} V = T^*_{\rho^*(G)y_0} V^*$ により V の軌道 $\rho(G)x_0$ と V^* の軌道 $\rho^*(G)y_0$ が 1 対 1 に対応する。これを互いに，dual orbit という。 //

Proposition 2. 次の空間(と各既約成分のスカラー倍との合成)は無限個の異なる軌道をもつ。

(1) $SL(n)$ $\quad \underbrace{\square+\cdots+\square}_{k}+\square^{(*)}$ $\quad (k \geqq 3)$

(2) $SL(n)$ $\quad$ 日 $+\square^{(*)}+\square^{(*)}+\square^{(*)}$ $\quad (n \geqq 4)$

(3) $SL(2m+1)$ $\quad$ 日＋日

(4) $SL(6)$ $\quad$ 目 $+\square+\square$

(5) $Spin(10)$ $\quad$ 偶半スピン表現＋偶半スピン表現

証明）(1) $k \geqq 3$で有限個の軌道をもつと仮定すると，lemma 1を各既約成分のisotropy subgroup等に適用して，

$\square+\square+\square^{*}+\square^{*}$ も有限個の軌道をもつことになるが，これはnon P.V. ゆえ矛盾。(2)の $n=2m+1$ の場合，及び(3)〜(5)も全く同様である。$n=2m$ のとき，有限個の軌道をもてば，lemma 1より，日 $+\square+\square+\square^{*}$ も有限個の軌道をもつ。$V=\{(X\,;\,x,y,z)\,;\ {}^tX=-X \in M(2m),\ x,y,z \in \mathbb{C}^{2m}\}$ の部分空間 $V'=\{(X'\,;\,x',y',z')\,;\ X'=\left(\begin{array}{c|c} X'' & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),\ {}^tX''=-X'' \in M(2m-1),\ x'=\begin{pmatrix} x'' \\ 0 \end{pmatrix},\ y'=\begin{pmatrix} y'' \\ 0 \end{pmatrix},\ z'=\begin{pmatrix} z'' \\ 0 \end{pmatrix},\ x'',y'',z'' \in \mathbb{C}^{2m-1}\}$ も有限個に分解し，V'の元がG-equivalentになる条件を書き

下してみれば, $SL(2m-1)$, 日+□+□+□* が少なくとも P.V. (i.e. 概均質) であることがわかり, これは矛盾. //Prop 2.

定理3. 単純代数群 G とその表現 $\rho : G \to GL(V)$ で, 各既約成分のスカラー倍との合成が有限個の軌道をもつものは, 次のものに限る。

(1) $SL(n)$
(□), □+□, □+□*, □+□+□, □+□+□*

(例えば □*, □*+□*, □+□*+□* などは $SL(n)$ の外部自己同型 $A \mapsto {}^tA^{-1}$ により, それぞれ □, □+□, □*+□+□ にうつるから, *triplet* として同値ゆえ省いてある.)

(2) $SL(n)$
日+□, 日+□*, 日+□+□, 日+□+□*, 日+□*+□*

(3) $SL(n)$
□□+□, □□+□*

(4) $SL(6)$
目+□

($SL(6)$ では 目*=目 ゆえ 目+□* は 目+□ と *triplet* として同値になる.)

(5) $SL(7)$
目+□, 目+□*

(6) $Sp(n)$
(□), □+□, □+□+□

(8) $Spin(n)$ (※)スピン表現＋ベクトル表現 $(n=7,8,10,12)$

(9) $Sp(2)$ 日＋□　　(10) $Sp(3)$ 目＋□

証明) 2頁の定理と Prop. 2 により，有限個の軌道に分解するなら，これらのうちの一つであることがわかる。次の§で各空間の軌道分解を行ない実際に有限個の軌道に分解する事を確かめる。 //

§1. 軌道分解 (*orbital decomposition*)

Lemma 1 により，例えば $SL(n)$ 日＋□$^{(*)}$＋□$^{(*)}$ の軌道分解は $SL(n)$ 日＋□*＋□* の場合にやれば十分である。$\rho : G \to GL(V)$ が l 個の既約表現の直和：$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_l$, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$ で $GL(1)^l$ が各既約成分にスカラー倍として作用する時は単に $(GL(1)^l \times G, \rho, V)$ または $(GL(1)^l \times G, \rho)$ と略記する。それ以外の場合，$GL(1)^k$ の作用を $\overset{1}{■}, \cdots, \overset{k}{■}$ と表わす事にする。例えば $(GL(1)^2 \times SL(n)$, $\overset{1}{■} \otimes$ 日 $+ \overset{2}{■} \otimes$ (□+□)) は $(GL(1) \times GL(1) \times SL(n)$, □ $\otimes 1 \otimes$ 日 $+ 1 \otimes$ □ $\otimes$ (□+□)) の意味である。$k=1$ のときは，$\overset{1}{■}$ のかわりに ■ とかく。

$\mathbb{C}^n$ の元 e_i を $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (i と定める $(i = 1, \cdots, n)$

一般に $\overbrace{\mathbb{C}^n \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^n}^{l} \ni x = (x_1, \cdots, x_l)$ に対し，$r_{i_1 \cdots i_k} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rank}(x_{i_1} \cdots x_{i_k})$ と定めると，これは $(GL(1)^l \times SL(n), \overbrace{□ \dotplus \cdots \dotplus □}^{l})$ の作用による不変量である。

Proposition 4.

(I) $(GL(1)\times SL(n), \square)$ (実は$(SL(n), \square)$で十分, $n\geqq 2$) の軌道分解

(1) 代表点 0, $r_1=0$ (2) 代表点 e_1, $r_1=1$

(II) $(GL(1)^2\times SL(n), \square+\square)$ (実は$(GL(1)\times SL(n), \blacksquare\otimes\square+\square)$で十分) は 5個の orbits をもつ.

代表点	r_1	r_2	r_{12}
$(0, 0)$	0	0	0
$(e_1, 0)$	1	0	1
$(0, e_1)$	0	1	1
(e_1, e_1)	1	1	1
(e_1, e_2)	1	1	2

(III) $(GL(1)^3\times SL(n), \square+\square+\square)$ は $n\geqq 3$ なら 16, $n=2$ なら 15個($(e_1e_2e_3)$を除いたもの)の orbits をもつ.

	代表点	r_1	r_2	r_3	r_{12}	r_{23}	r_{31}	r_{123}
(1)	$(0\ 0\ 0)$	0	0	0	0	0	0	0
(2)	$(e_1\ 0\ 0)$	1	0	0	1	0	1	1
(3)	$(0\ e_1\ 0)$	0	1	0	1	1	0	1
(4)	$(0\ 0\ e_1)$	0	0	1	0	1	1	1
(5)	$(0\ e_1\ e_1)$	0	1	1	1	1	1	1
(6)	$(e_1\ 0\ e_1)$	1	0	1	1	1	1	1
(7)	$(e_1\ e_1\ 0)$	1	1	0	1	1	1	1

代表点		r_1	r_2	r_3	r_{12}	r_{23}	r_{31}	r_{123}
(8)	$(e_1\ e_1\ e_1)$	1	1	1	1	1	1	1
(9)	$(0\ e_1\ e_2)$	0	1	1	1	2	1	2
(10)	$(e_1\ 0\ e_2)$	1	0	1	1	1	2	2
(11)	$(e_1\ e_2\ 0)$	1	1	0	2	1	1	2
(12)	$(e_1\ e_1\ e_2)$	1	1	1	1	2	2	2
(13)	$(e_1\ e_2\ e_2)$	1	1	1	2	1	2	2
(14)	$(e_1\ e_2\ e_1)$	1	1	1	2	2	1	2
(15)	(e_1, e_2, e_1+e_2)	1	1	1	2	2	2	2
(16)	$(e_1\ e_2\ e_3)$	1	1	1	2	2	2	3

証明）(Ⅲ)を示せば十分である。表現空間を $n\times 3$ 行列全体と同一視すると，$GL(n)$ の左からの作用で階段行列にできる。即ち $\begin{pmatrix}1&*&*\\ &&\\ &&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&*&0\\ &&1\\ &&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&*\\ &1&*\\ &&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\ &1&0\\ &&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&*\\ &&\\ &&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\ &&1\\ &&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\ &&\\ &&\end{pmatrix}\begin{pmatrix} &&\\ &0&\\ &&\end{pmatrix}$ のいずれかの形になる。

$GL(1)$ の作用で $*$ は 0 か 1 とできるから，(Ⅲ)の 16 通りを得る。これらが異なる orbits である事は r_i, r_{ij}, r_{123} 等の不変量が異なることから明らか。 //Q.E.D.

注意）$(SL(n), \square+\square^*$ または $\square+\square+\square^*)$ の軌道分解も全く同じである事が Lemma 1 よりわかる。$(SL(n), \square+\square+\square+\square^{(*)})$ において $\left(\begin{array}{cccc}1&0&1&z\\0&1&1&1\\ \hline &&0&\end{array}\right)$ は，z が異なれば異なる orbits に属し，この事からも無限個の軌道をもつ事がわかる。

$\overset{SL(n)}{\boxminus+\square+\square}$ の軌道分解をする前に $\overset{Sp(n)}{\square+\square+\square}$ の軌道分解をやる。$(Sp(n),\square)$ の表現空間は $\mathbb{C}^{2n}$ で, $e_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ に $(i=1,\cdots,2n)$ とおく。$Sp(n)$ のリー環は $sp(n)=\left\{\left(\begin{array}{c|c}A&B\\ \hline C&-{}^tA\end{array}\right)\in M(2n);\ {}^tB=B,\ {}^tC=C\right\}$ で与えられる。$\overbrace{\square+\cdots+\square}^{k}$ $(1\leq k\leq 3)\ni x=(x_1,\cdots,x_k)$ に対して
$r_i=\mathrm{rank}\,x_i$, $r_{ij}=\mathrm{rank}(x_i,x_j)$, $r'_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } \langle x_i,x_j\rangle={}^tx_iJx_j\neq 0\\ 0 & \text{if } \quad '' \quad =0\end{cases}$
$r=\mathrm{rank}(x_1x_2x_3)$, とおくと, これらは群の作用による不変量である。即ち, これ等の値が異なる点は, 異なる軌道に属す。

Proposition 5.

(I) $(GL(1)\times Sp(n),\square)$ (実は $(Sp(n),\square)$ で十分) は2個の軌道をもつ. (1) 0, $r_1=0$, (2) e_1, $r_1=1$

(II) $(GL(1)^2\times Sp(n),\square+\square)$ (実は $(GL(1)\times Sp(n),\blacksquare\otimes(\square+\square))$ で十分) $(n\geq 2)$ は6個の軌道をもつ。

	代表点	r_1	r_2	r_{12}	r'_{12}
(1)	(e_1,e_{n+1})	1	1	2	1
(2)	(e_1,e_2)	1	1	2	0
(3)	(e_1,e_1)	1	1	1	0
(4)	$(0,e_1)$	0	1	1	0
(5)	$(e_1,0)$	1	0	1	0
(6)	$(0,0)$	0	0	0	0

(III) $(GL(1)^3\times Sp(n),\square+\square+\square)$ は, $n\geq 3$ なら30個, $n=2$ なら29個の軌道に分解する。

代表点		r_1	r_2	r_3	r_{12}	r_{23}	r_{31}	r'_{12}	r'_{23}	r'_{31}	r	
(1)	$(e_1, e_{n+1}, e_1+e_2+e_{n+1})$	1	1	1	2	2	2	1	1	1	3	
(2)	$(e_1, e_2, e_{n+1}+e_{n+2})$	1	1	1	2	2	2	0	1	1	3	
(3)	$(e_1, e_{n+1}, e_2+e_{n+1})$	1	1	1	2	2	2	1	0	1	3	
(4)	(e_1, e_{n+1}, e_1+e_2)	1	1	1	2	2	2	1	1	0	3	
(5)	(e_1, e_{n+1}, e_2)	1	1	1	2	2	2	1	0	0	3	
(6)	(e_1, e_2, e_{n+2})	1	1	1	2	2	2	0	1	0	3	
(7)	(e_1, e_2, e_{n+1})	1	1	1	2	2	2	0	0	1	3	
(8)	(e_1, e_2, e_3)	1	1	1	2	2	2	0	0	0	3	($n \geqq 3$のみ)
(9)	$(e_1, e_{n+1}, e_1+e_{n+1})$	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2	
(10)	(e_1, e_1, e_{n+1})	1	1	1	1	2	2	0	1	1	2	
(11)	(e_1, e_{n+1}, e_{n+1})	1	1	1	2	1	2	1	0	1	2	
(12)	(e_1, e_{n+1}, e_1)	1	1	1	2	2	1	1	1	0	2	
(13)	(e_1, e_2, e_1+e_2)	1	1	1	2	2	2	0	0	0	2	
(14)	$(e_1\ e_1\ e_2)$	1	1	1	1	2	2	0	0	0	2	
(15)	$(e_1\ e_2\ e_2)$	1	1	1	2	1	2	0	0	0	2	
(16)	$(e_1\ e_2\ e_1)$	1	1	1	2	2	1	0	0	0	2	
(17)	$(0\ e_1\ e_{n+1})$	0	1	1	1	2	1	0	1	0	2	
(18)	$(e_1\ 0\ e_{n+1})$	1	0	1	1	1	2	0	0	1	2	
(19)	$(e_1\ e_{n+1}\ 0)$	1	1	0	2	1	1	1	0	0	2	
(20)	$(0\ e_1\ e_2)$	0	1	1	1	2	1	0	0	0	2	

	代表点	r_1	r_2	r_3	r_{12}	r_{23}	r_{31}	r_{12}'	r_{23}'	r_{31}'	r
(21)	$(e_1\ 0\ e_2)$	1	0	1	1	1	2	0	0	0	2
(22)	$(e_1\ e_2\ 0)$	1	1	0	2	1	1	0	0	0	2
(23)	$(e_1\ e_1\ e_1)$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
(24)	$(0\ e_1\ e_1)$	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
(25)	$(e_1\ 0\ e_1)$	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
(26)	$(e_1\ e_1\ 0)$	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
(27)	$(e_1\ 0\ 0)$	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
(28)	$(0\ e_1\ 0)$	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1
(29)	$(0\ 0\ e_1)$	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
(30)	$(0\ 0\ 0)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

証明）

（Ⅰ） $$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_2 & & \vdots & b_{12} & b_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_n & b_{1n} & \cdots & & b_n \\ \hline c_1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} & -a_1 & -a_{21} & \cdots & -a_{n1} \\ c_{12} & c_2 & & \vdots & -a_{12} & -a_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ c_{1n} & \cdots & & c_n & -a_{1n} & \cdots & & -a_n \end{array}\right) \underset{\displaystyle x}{\underset{\shortparallel}{\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \hline x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{array}\right)}}$$

$Sp(n)$のリー環

において $x \neq 0$ なる $a_{12}, \cdots, a_{1n}, b_1, \cdots, b_{1n}$ により $x_1 \neq 0$ とでき，a_1 により $x_1 = 1$ として可．その時，$a_{21}, \cdots, a_{n1}, c_1, c_{12}, \cdots, c_{1n}$ により $x_2 = \cdots = x_{2n} = 0$ とできる。即ち $x \neq 0$ なる $x \sim e_1$．ここで例えば"a_{12}より"という意味は，a_{12} 以外すべて 0 とした行列を A としたとき，$Sp(n)$の元 $\exp A$ の作用によりという事で，以下でも簡単の為に，この言い方をする。

（Ⅱ） $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \ni \tilde{x} = (x, y)$ とする時，(Ⅰ)により $x = 0$ or e_1 とし

て可、$x=0$ なら(I)により $y=0$ の e_1, 即ち(6)と(4)を得る。

$x=e_1$ とする。$GL(1)\times Sp(n)$ の e_1 における isotropy subalgebra $\mathfrak{h}$

は、
$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -{}^tA \end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(\alpha)=\begin{pmatrix}a_1+\alpha\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\\ c_1\\ c_{12}\\ \vdots\\ c_{1n}\end{pmatrix}=0 \quad \text{より}$$

$$(\alpha)\oplus\left[\begin{array}{cccc|cccc} -\alpha & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & a_2 & \cdots & a_{2n} & b_{12} & b_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_n & b_{1n} & \cdots & \cdots & b_n \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & c_{2n} & -a_{12} & -a_2 & \cdots & -a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{2n} & \cdots & c_n & -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & -a_n \end{array}\right] \quad (\cong sp(n-1)\oplus n(2n-1))$$

$$= (\alpha)\oplus A_0,\ \text{とおく.}$$

これを $y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_{2n}\end{pmatrix}$ に $A_0y+y(\beta)$ と作用させる。$y'=\begin{pmatrix}y_2\\ \vdots\\ y_n\\ y_{n+2}\\ \vdots\\ y_{2n}\end{pmatrix}$

には $Sp(n-1)$ が作用するから(I)により $y'=0$ の $\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$.

$y_{n+1}\neq 0$ なる α により $y_{n+1}=1$, b_1, b_{12} により $y_1=y_2=0$ 即ち

$y\sim e_{n+1}$ となり(1)を得る。$y_{n+1}=0$ のとき, $y'=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ なる a_{12} により

$y_1=0$, 即ち $y\sim e_2$ となり(2)を得る。$y'=0$ なる $y_1\neq 0$ の 0 に応じて(3)または(5)を得る。

(III) $\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{C}^n\ni \tilde{x}=(x,y,z)$ において (x,y) は(II)の6つのうちどれかとしてよい。(4)〜(6)なら(II)を再びくり返せばよいから $(x,y)\sim(e_1,e_{n+1}),\ (e_1,e_2),\ (e_1,e_1)$ のいずれかとして可.

$(x,y)=(e_1,e_{n+1})$ の場合,
$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -{}^tA \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 1 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix}\alpha & \\ & \beta\end{pmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} a_1+\alpha & b_1 \\ a_{21} & b_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_{1n} \\ \hline c_1 & -a_1+\beta \\ c_{12} & -a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ c_{1n} & -a_{1n} \end{array}\right]=0$$

ゆえ
$$\underbrace{(-a_1,a_1)\oplus}_{(e_1,e_{n+1})\text{ の isotropy subalg.}}\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & & & & & & & \\ & a_2 & \cdots & a_{2n} & b_2 & \cdots & & b_{2n} \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & a_{n2} & \cdots & a_n & b_{2n} & \cdots & & b_n \\ \hline & & & & -a_1 & & & \\ & c_2 & \cdots & c_{2n} & & -a_2 & \cdots & -a_{n2} \\ & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & c_{2n} & \cdots & c_n & & -a_{2n} & \cdots & -a_n \end{array}\right]\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n\\ \hline z_{n+1}\\ z_{n+2}\\ \vdots\\ z_{2n}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}z_1\\ \vdots\\ \vdots\\ z_{2n}\end{bmatrix}(\gamma)$$
を調べればよい.

$z' = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+2} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix}$ には $Sp(n-1)$ が働くから $z'=0$ の $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, そして

$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1+\gamma & \\ & -a_1+\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$ ゆえ $z_1, z_{n+1} = 0$ の 1,

即ち $z = e_1+e_2+e_{n+1},\ e_1+e_{n+1},\ e_2+e_{n+1},\ e_1+e_2,\ e_1,\ e_2,\ e_{n+1},\ 0$

の 8 通りになる。

$(x, y) = (e_1, e_2)$ の場合, $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -{}^tA \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} a_1+\alpha & a_{12} \\ a_{21} & a_2+\beta \\ \vdots & a_{32} \\ a_{n1} & a_{n2} \\ \hline c_1 & c_{12} \\ c_{12} & c_2 \\ \vdots & c_{23} \\ c_{1n} & c_{2n} \end{array}\right) = 0$

より

$$\underbrace{(-a_1, -a_2) \oplus}_{(e_1, e_2)\text{ の isotopy subalg.}} \left(\begin{array}{cccccc|ccccc} a_1 & & a_{13} & \cdots & a_{1n} & & b_1 & b_{12} & \cdots & & b_{1n} \\ & a_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} & & b_{12} & b_2 & \cdots & & b_{2n} \\ & & a_3 & \cdots & a_{3n} & & \vdots & \vdots & b_3 & \cdots & b_{3n} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{n3} & \cdots & a_n & & b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & \cdots & b_n \\ \hline & & & & & & -a_1 & & & & \\ & & & & & & & -a_2 & & & \\ & & c_3 & \cdots & c_{3n} & & -a_{13} & -a_{23} & -a_3 & \cdots & -a_{n3} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & c_{3n} & \cdots & c_n & & -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & -a_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ \hline z_{n+1} \\ z_{n+2} \\ z_{n+3} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{array}\right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix} (\gamma)$$

を調べればよい。

$z' = \left(\begin{array}{c} z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ \hline z_{n+3} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{array}\right)$ には $Sp(n-2)$ が働くから (I) より $z'=0$ の $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ として可.

(i) $\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ z_{n+2} \end{pmatrix} = 0$ のとき, $z'=0$ なる $z_1, z_2 = 0$ の 1, 即ち $\underline{z = 0, e_1, e_2, e_1+e_2}$.

$z' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき, a_{13}, a_{23} により $z_1 = z_2 = 0$ として可, 即ち, $z = \underline{e_3}$.

(ii) $\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ z_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ なる b_1, b_{12} により $z_1 = z_2 = 0$, b_{13} により $z'=0$ として可, 即ち $\underline{z = e_{n+1}}$

(iii) $\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ z_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なる b_2, b_{12} により $z_1 = z_2 = 0$, b_{23} により $z'=0$, 即ち $\underline{z = e_{n+2}}$.

(iv) $\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ z_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ なる, b_1, b_2 により $z_1 = z_2 = 0$, b_{13} により $z'=0$, 即ち $\underline{z = e_{n+1}+e_{n+2}}$.

以上まとめて, $(x, y) = (e_1, e_2)$ の場合, $z = 0, e_1, e_2, e_3, e_{n+1}, e_{n+2}$

$e_1+e_2,\ e_{n+1}+e_{n+2}$ の 8 通りになる。

$(x,y)=(e_1,e_1)$ の場合, $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -{}^tA \end{array}\right)\begin{pmatrix}1&1\\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \\ & \beta\end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} a_1+\alpha & a_1+\beta \\ a_{21} & a_{21} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} \\ c_1 & c_1 \\ c_{12} & c_{12} \\ \vdots & \vdots \\ c_{1n} & c_{1n} \end{array}\right]=0$ より,

$$\underbrace{(-a_1,-a_1)\oplus}\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_1\, a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\, b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & a_2 \cdots & a_{2n} & b_{12}\, b_2 & & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ & a_{n2} \cdots & a_n & b_{1n} & \cdots & b_n \\ \hline & & & -a_1 & & \\ & c_2 \cdots & c_{2n} & -a_{12}\ -a_2 & \cdots & -a_{n2} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & c_{2n} \cdots & c_n & -a_{1n}\ -a_{2n} & \cdots & -a_n \end{array}\right]\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ \hline z_{n+1} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+1} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix}(\gamma)$$

を調べればよい。

(e_1,e_1) の isotropy subalg.

$z' = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+2} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix}$ には $Sp(n-1)$ が作用するから (I) より $z'=0$ の $\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$.

$z_{n+1} \neq 0$ の場合, a_1 で $z_{n+1}=1$, b_1 で $z_1=0$, b_{12} で $z'=0$, 即ち $\underline{z=e_{n+1}}$.

$z_{n+1}=0$ の場合, $z' = \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$ なる a_{12} により $z_1=0$, 即ち $\underline{z=e_2}$,

$z'=0$ のとき $z_1=0$ の 1, 即ち, $z=\underline{0}$ または $\underline{e_1}$.

(Prop 5 の証明終)

次に $SL(n)$, 日, 日$+\square^{(*)}$, 日$+\square^{(*)}+\square^{(*)}$ 等の軌道分解をやる。Lemma 1 により, 日, 日$+\square^*$, 日$+\square^*+\square^*$ をやれば十分である。$J_k = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_k \\ \hline -I_k & 0 \end{array}\right)$, $J_k' = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(n)$ とおく。日の表現空間 V_1 は $V_1 = \{X \in M(n)\,;\, {}^tX = -X\}$ であり, $X \mapsto AX{}^tA$ と作用する。従って $\mathrm{rank}\,X$ は不変量である。日$+\square^*$ は $\{(X, x_1)\,;\, X \in V_1, x_1 \in \mathbb{C}^n\}$ で, $(X, x_1) \mapsto (AX{}^tA, {}^tA^{-1}x_1)$ と作用する。$\mathrm{rank}\,X$, $\mathrm{rank}\,x_1$ は不変量だが, $Xx_1 \mapsto A(Xx_1)$ ゆえ, $\mathrm{rank}\,Xx_1$ も不変量。同様に日$+\square^*+\square^* \ni (X, x_1, x_2)$ に於ては, $r = \mathrm{rank}\,X$, $r_1 = \mathrm{rank}\,x_1$, $r_2 = \mathrm{rank}\,x_2$, $r_{12} = \mathrm{rank}\,(x_1\, x_2)$, $r_1' = \mathrm{rank}\,Xx_1$, $r_2' = \mathrm{rank}\,Xx_2$,

$r_{12}' = \mathrm{rank}(Xx_1, Xx_2)$, $r' = \begin{cases} 1 & \text{if } {}^t x_2 X x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{if } {}^t x_2 X x_1 = 0 \end{cases}$ 等は不変量である。

さて [ ] を Gauss 記号として，

$$n' = \left[\frac{n}{2}\right] = m \quad \text{if} \quad n = 2m \text{ or } n = 2m+1$$

$$n'' = \left[\frac{n-1}{2}\right] = \begin{cases} m-1 & \text{if } n = 2m \\ m & \text{if } n = 2m+1 \end{cases}$$ と定める。

以上の記号のもとで，

Proposition 6. (I) $(GL(1)\times SL(n), ⊟)$ (但し n=奇数のとき $(SL(n), ⊟)$ で十分)は，$(n'+1)$ 個の軌道に分解する。

代表点 J_k'，$r = 2k$ $(k = 0, 1, \cdots, n')$

(II) $(GL(1)^2\times SL(n), ⊟+\square^*)$ は $2n'+n''+2$ $(= 3m+1$ if $n=2m$, $=3m+2$ if $n=2m+1)$ 個の軌道に分解する.

	代表点	r	r_1	r_1'	
(1)	$(J_k'\ e_1)$	$2k$	1	1	$(1 \leq k \leq n')$
(2)	$(J_k'\ e_n)$	$2k$	1	0	$(0 \leq k \leq n'')$
(3)	$(J_k'\ 0)$	$2k$	0	0	$(0 \leq k \leq n')$

(III) $(GL(1)^3\times SL(n), ⊟+\square^*+\square^*)$ (実は n=偶数なら $(GL(1)^2\times SL(n), \overset{1}{■}\otimes⊟+\overset{2}{■}\otimes(\square^*+\square^*))$, n=奇数なら $(GL(1)^2\times SL(n), ⊟+\overset{1}{■}\otimes\square^*+\overset{2}{■}\otimes\square^*)$ で十分)は，$7n'+6n''+3$ $\left(\begin{matrix} =13m-3 & n=2m \\ =13m+3 & n=2m+1 \end{matrix}\right)$ 個の軌道に分解する。

代表点	r	r_1	r_2	r_{12}	r_1'	r_2'	r_{12}'	r'	
(1) $(J_k'\ e_1\ e_{k+1})$	$2k$	1	1	2	1	1	2	1	$(1 \leq k \leq n')$
(2) $(J_k'\ e_1\ e_2)$	$2k$	1	1	2	1	1	2	0	$(2 \leq k \leq n')$
(3) $(J_k'\ e_1, e_1+e_n)$	$2k$	1	1	2	1	1	1	0	$(1 \leq k \leq n'')$

代表点	r	r_1	r_2	r_{12}	r_1'	r_2'	r_{12}'	r'	
(4) $(J_k' e_1 e_n)$	$2k$	1	1	2	1	0	1	0	$(1\leq k\leq n'')$
(5) $(J_k' e_n e_1)$	$2k$	1	1	2	0	1	1	0	$(1\leq k\leq n'')$
(6) $(J_k' e_n e_{n-1})$	$2k$	1	1	2	0	0	0	0	$(0\leq k\leq n'-1)$
(7) $(J_k' e_1 e_1)$	$2k$	1	1	1	1	1	1	0	$(1\leq k\leq n')$
(8) $(J_k' e_1 0)$	$2k$	1	0	1	1	0	1	0	$(1\leq k\leq n')$
(9) $(J_k' 0 e_1)$	$2k$	0	1	1	0	1	1	0	$(1\leq k\leq n')$
(10) $(J_k' e_n e_n)$	$2k$	1	1	1	0	0	0	0	$(0\leq k\leq n'')$
(11) $(J_k' e_n 0)$	$2k$	1	0	1	0	0	0	0	$(0\leq k\leq n'')$
(12) $(J_k' 0 e_n)$	$2k$	0	1	1	0	0	0	0	$(0\leq k\leq n'')$
(13) $(J_k' 0 0)$	$2k$	0	0	0	0	0	0	0	$(0\leq k\leq n')$

(証明) (I)は，線型代数でよく知られた結果である。

(II) J_k' における isotropy subalgebra は $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B\end{array}\right)$ $(A\in Sp(k))$ である。よって，x_1 には $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B\end{array}\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $(x\in\mathbb{C}^{2k}, y\in\mathbb{C}^{n-2k})$ $(x_1=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})$ と作用する。よって $k\neq 0, \frac{n}{2}$ なら Prop 5, (I) より $x=0$ or $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$. $x=0$ のとき，B により $y=0$ or $\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 即ち $x_1=0$ or e_n. $x=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ のとき，C により $y=0$ 即ち $x=e_1$. $k=0$ なら B より，$y=0$ or $\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ i.e. $x=0$ or e_n. $k=\frac{n}{2}$ なら $x=0$ or e_1. 不変量が異なるから，すべて異なる軌道である。

(III) $(J_k'\, 0\, x_2)$ の場合は(II)をくり返して(9), (12), (13)を得る。

$(J_k'\, e_1\, x_2)$ の場合 $(1\leq k\leq n')$, $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ \hline & y\end{array}\right)$ $(x\in\mathbb{C}^{2k}, y\in\mathbb{C}^{n-2k}, A\in Sp(k))$ を考える。$k\neq 1, \frac{n}{2}$ の場合，Prop 5 (II) より $x=0, \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}(k+1$ の4つ

になり, $x=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(k+1)$ の場合はCにより $y=0$ とできる。即ち(2),(1)を得る。$x=0, \begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ の時, Bにより $y=0$ or $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ とできる。即ち(8)(4)(7)(3)を得る。$k=1$ のときは $x=0, \binom{1}{0}\binom{0}{1}$ の3つで, yに関しては今と同様. $k=\frac{n}{2}$ の時 Prop 5 (II) より $x=0, e_1, e_2, e_{k+1}$ の4つである。

$(J_k'\ e_n\ x_2)$ $(0\le k\le n''$, 特に $k\ne\frac{n}{2})$ の場合, $\left(\begin{array}{c|c}A&0\\ \hline C&B\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}&x\\ \hline 1&y\end{array}\right)$ を考える。$k\ne0$ の時, $x=0$ or $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, $x=0$ のとき $y=0$ or $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ $(n-2k\ge2)$ 即ち(11)(10)(6)を得る。$x=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ の時Cにより $y=0$, 即ち(5)を得る。$k=0$ の時は $y=0, e_n, e_{n-1}$ 即ち(11)(10)(6)のいづれかである。

(Prop 6 の証明終)

次に $SL(n)$, $\square\square$ を考える。表現空間は $\{X\in M(n), {}^tX=X\}$ で $X\mapsto AX{}^tA$ と作用する。$\square\square+\square$ と $\square\square+\square^*$ の orbits は(どちらかが有限個なら)1対1に対応する(Lemma 1)から $\square\square+\square^*$ の軌道分解を行なう。$(X,x)\mapsto(\alpha AX{}^tA, \beta\,{}^tA^{-1}x)$ $(\alpha,\beta\in GL(1), A\in SL(n))$ $(x\in\mathbb{C}^n)$ と作用するから, rank X, rank x, rank Xx, rank ${}^txXx$ はすべて不変量である。I_k を k 次単位行列, $I_k'=\begin{pmatrix}I_k&0\\ 0&0\end{pmatrix}\in M(n)$ $(k=0,1,\dots,n)$ とおく。

Proposition 7. $(GL(1)^2\times SL(n), \square\square+\square^*)$ は $4n$ 個の軌道に分解する。

その代表点, 及び rank 等の不変量は次の通り。

代表点	rank$X$	rank$x$	rankXx	rank${}^t xXx$	
(1) (I_k', e_1)	k	1	1	1	$(1 \leq k \leq n)$
(2) $(I_k', e_1+\sqrt{-1}e_2)$	k	1	1	0	$(2 \leq k \leq n)$
(3) (I_k', e_n)	k	1	0	0	$(0 \leq k \leq n-1)$
(4) $(I_k', 0)$	k	0	0	0	$(0 \leq k \leq n)$

(証明) I_k' に於る isotropy subalgebra は，$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right)$ $(A \in O(k))$ ゆえ $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right)$ $(x_1 \in \mathbb{C}^k, x_2 \in \mathbb{C}^{n-k})$ を考えればよい。$k=0$ なら $x = x_2 = 0$ or $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ として可，即ち(4)(3). $k=1$ なら $x_1 = 0$ or 1. $x_1 = 0$ なら $x_2 = 0$ or $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ i.e. (4),(3). $x_1 = 1$ なら，C により $x_2 = 0$ として可、即ち(1). $k=n$ なら$(GO(n), \square)$ の分類に帰着し，$x = e_1, e_1+\sqrt{-1}e_2, 0$ として可、即ち(1)(2)(4). $2 \leq k \leq n-1$ なら，$x_1 = 0$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の 3 つで，$x_1 = 0$ なら，$x_2 = 0$ or $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$，即ち(3),(4). $x_1 \neq 0$ なら C で $x_2 = 0$ となり(2)(1)を得る。 (Prop 7 の証明終り) //

$\left(u_i = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} に\right)$

次に$(SL(6), 目+\square)$を考える。$\mathbb{C}^6$ の base を $u_1, \cdots, u_6$ とすると，表現空間の元は$\Big(\underbrace{\sum_{1\leq i<j<k\leq 6} x_{ijk} u_i \wedge u_j \wedge u_k}_{\parallel \atop x}, \underbrace{\sum_{l=1}^{6} y_l u_l}_{\parallel \atop y}\Big)$ と表わせる。

$\hat{x} = \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial x}{\partial u_i}$, $x \wedge \hat{x} = \sum_{i,j=1}^{6} \varphi_{ij}(x) y_i v_j$, $u_j \wedge v_j = \omega \ (= u_1 \wedge \cdots \wedge u_6)$

として，$\varphi(x) = (\varphi_{ij}(x))$ なる 6 次行列を作ると，$\varphi(\rho(g)x) = \det g \cdot g\varphi(x)g^{-1}$ $(g \in GL(6), \rho = 目)$ となる事が知られている([3]).

よって，rank $\varphi(x)$, rank $\varphi(x)y$, rank y, rank x (x を20次元ベクトルとみなして) は不変量である。また $x \wedge y$ は $\overset{SL(6)}{目 = 日^*}$ の元を

定めるから，6次歪対称行列 $(x\wedge y)^*$ が存在して $(\rho(g)x\wedge gy)^* = {}^tg^{-1}(x\wedge y)^*g^{-1}$ となり，$\mathrm{rank}\,(x\wedge y)^*$ も不変量である。

Proposition 8. $(GL(1)^2\times SL(6)$, 目+口$)$ (実は $(GL(1)\times SL(6)$, [redacted]$\otimes$目+口$)$ で十分) は，次の15個の軌道に分解する。

代表点	rank x	rank y	rank $\varphi(x)$	rank $\varphi(x)y$	rank $(x\wedge y)^*$
(1) $(123+456,\ u_1+u_4)$	1	1	6	1	4
(2) $(123+456,\ u_1)$	1	1	6	1	2
(3) $(123+456,\ 0)$	1	0	6	0	0
(4) $(123+145+246,\ u_6)$	1	1	3	1	4
(5) $(123+145+246,\ u_1)$	1	1	3	0	2
(6) $(123+145+246,\ 0)$	1	0	3	0	0
(7) $(123+145,\ u_6)$	1	1	1	1	4
(8) $(123+145,\ u_2)$	1	1	1	0	2
(9) $(123+145,\ u_1)$	1	1	1	0	0
(10) $(123+145,\ 0)$	1	0	1	0	0
(11) $(123,\ u_6)$	1	1	0	0	2
(12) $(123,\ u_1)$	1	1	0	0	0
(13) $(123,\ 0)$	1	0	0	0	0
(14) $(0,\ u_1)$	0	1	0	0	0
(15) $(0,\ 0)$	0	0	0	0	0

但し $u_i\wedge u_j\wedge u_k$ を ijk と略記した。

（証明）$(GL(6), \text{目})$ は5つの軌道にわかれる事が知られており，$x_0 = 123+456$ $(= u_1\wedge u_2\wedge u_3 + u_4\wedge u_5\wedge u_6$ の意味．以下同様），

$x_1 = 123+145+246$，$x_5 = 123+145$，$x_{10} = 123$，$x_{20} = 0$ で，$\varphi(x_0) = \begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& -1 && \\ &&&& -1 & \\ &&&&& -1 \end{pmatrix}$

$\varphi(x_1) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 0 & & \\ & & \\ & -2 & \\ 0 & 0 & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 0 & 2 & -2 \\ & & \\ & 0 & \end{smallmatrix} \end{array}\right)$，$\varphi(x_5) = \begin{pmatrix} \bigcirc & -2 \\ & \end{pmatrix}$，$\varphi(x_{10}) = \varphi(x_{20}) = 0$ である（[2]，[3]）．

$x = x_0 = 123+456$ の場合）isotropy subalg. は $\left\{\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) ; A, B \in \mathfrak{sl}(3)\right\}$ ゆえ，$y = u_1+u_4$，u_1，u_4，0 のいずれかに帰着．$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_3 \\ \hline I_3 & 0 \end{array}\right) \in GL(6)$ により $u_1 \sim u_4$ ゆえ (1)(2)(3) を得る。

$x = x_1 = 123+145+246$ の場合），[2] で (P.40) $126+234-135$ における isotropy subalg. $= \left\{\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & A - (\mathrm{tr} A) I_3 \end{array}\right) ; A, B \in M(3), \mathrm{tr} B = 0\right\}$ となるから この場合 $0, e_3, e_6$ の3通り。置換 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ で x_1 の場合にもどせば $0, u_1, u_6$ の3通り，(3)(5)(4) に帰着する。

$x_5 = 123+145$ の場合） isotropy subalg. は $\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & Sp(2) & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_6 \end{pmatrix}$ ゆえ $y_6 \neq 0$ なる $y_1 = \cdots = y_5 = 0$ とできる。即ち(7)．$y_6 = 0$ なる $\begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix}$ に $Sp(2)$ が作用するから $\begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ or (0)，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ なる $y_1 = 0$ とできる．即ち(8)．(0) なる $x_1 = 1$ or 0 即ち(9)(10)．

$x_{10} = 123$ の場合）isotropy subalg. は $\left\{\left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right] ; A \in \mathfrak{sl}(3), \right\}$ ゆえ $\begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ or (0)．$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき，C により $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ として可，即ち(11)．(0) の時，$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ or (0) 即ち(12)，(13)．

$x_{20} = 0$ の場合は，$y = u_1$ or 0． //（Prop 8 の証明終わり）

次に $(GL(1)^2 \times SL(7), \text{目} + \square^{(*)})$ を考える。Lemma 1 により，目 + $\square^*$ を考えれば十分．$\mathbb{C}^7$ の base $u_i = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i$ $(i = 1, \ldots, 7)$ をとると，目 + $\square^*$ の元は (x, y)，$x = \sum_{1 \le i < j < k \le 7} x_{ijk}\, u_i \wedge u_j \wedge u_k$，$y = \sum_{l=1}^{7} y_l u_l$

と表わせる。$\hat{x}=\sum_{l=1}^{7} z_l \frac{\partial x}{\partial u_l}$ (z_lは不定元)とすると $x\wedge\hat{x}\wedge\hat{x}$ $=\sum_{i,j=1}^{7}\varphi_{ij}(x)z_i z_j\,\omega$ $(\omega=u_1\wedge\cdots\wedge u_7)$ となり，$\varphi(x)=(\varphi_{ij}(x))$ とおくと $\varphi(\rho(g)x)=(\det g)\,g\,\varphi(x)\,{}^tg$ $(g\in GL(7),\ \rho=$目$)$ となる([3])．$(x,y)\mapsto(\rho(g)x,\ {}^tg^{-1}y)$ ゆえ $r=\operatorname{rank}\varphi(x)$, $r_1=\operatorname{rank}\varphi(x)y$, $r_2=\operatorname{rank}y$, $r'=\begin{cases}1 & {}^ty\varphi(x)y\neq 0\\ 0 & {}^ty\varphi(x)y=0\end{cases}$，及び軌道の次元は不変量である。

Proposition 9. $(GL(1)^2\times SL(7),$ 目$+\square^*)$ は次の38個の軌道に分解する。但し $u_i\wedge u_j\wedge u_k$ を ijk と略記する.

	代表点	r	r_1	r_2	r'	dim
(1)	$(234+567+1\cdot(25+36+47),\ e_1)$	7	1	1	1	42
(2)	$(234+567+1\cdot(25+36+47),\ e_2)$	7	1	1	0	41
(3)	$(235+346+1\cdot(27-45),\ e_5)$	4	0	1	0	41
(4)	$(235+346+1\cdot(27-45),\ e_6)$	4	0	1	0	40
(5)	$(235+346+1\cdot(27-45),\ e_1+e_4)$	4	1	1	0	38
(6)	$(134+256+127,\ e_7)$	2	0	1	0	38
(7)	$(235+346+1\cdot(27-45),\ e_1)$	4	1	1	0	37
(8)	$(134+256+127,\ e_3+e_5)$	2	0	1	0	37
(9)	$(234+567+1\cdot(25+36+47),\ 0)$	7	0	0	0	35
(10)	$(134+256+127,\ e_3)$	2	0	1	0	35
(11)	$(234+1\cdot(25+36+47),\ e_5)$	1	0	1	0	35
(12)	$(235+346+1\cdot(27-45),\ 0)$	4	0	0	0	34
(13)	$(134+256+127,\ e_1+e_2)$	2	1	1	0	33

代表点	r	r_1	r_2	r'	dim
(14) $(123+456,\ e_7)$	0	0	1	0	33
(15) $(134+256+127,\ e_1)$	2	1	1	0	32
(16) $(234+1\cdot(25+36+47),\ e_2)$	1	0	1	0	32
(17) $(123+456,\ e_1+e_4)$	0	0	1	0	32
(18) $(126-135+234,\ e_7)$	0	0	1	0	32
(19) $(126-135+234,\ e_4)$	0	0	1	0	31
(20) $(134+256+127,\ 0)$	2	0	0	0	31
(21) $(234+1\cdot(25+36+47),\ e_1)$	1	1	1	0	29
(22) $(123+456,\ e_1)$	0	0	1	0	29
(23) $(234+1\cdot(25+36+47),\ 0)$	1	0	0	0	28
(24) $(126-135+234,\ e_1)$	0	0	1	0	28
(25) $(1\cdot(25+36+47),\ e_2)$	1	0	1	0	28
(26) $(1\cdot(24+35),\ e_6)$	0	0	1	0	27
(27) $(123+456,\ 0)$	0	0	0	0	26
(28) $(126-135+234,\ 0)$	0	0	0	0	25
(29) $(1\cdot(24+35),\ e_2)$	0	0	1	0	25
(30) $(1\cdot(25+36+47),\ e_1)$	1	1	1	0	22
(31) $(1\cdot(25+36+47),\ 0)$	1	0	0	0	21
(32) $(1\cdot(24+35),\ e_1)$	0	0	1	0	21
(33) $(1\cdot(24+35),\ 0)$	0	0	0	0	20
(34) $(123,\ e_4)$	0	0	1	0	20
(35) $(123,\ e_1)$	0	0	1	0	16

	代表点	γ	γ_1	γ_2	γ'	dim
(36)	$(123, 0)$	0	0	0	0	13
(37)	$(0, e_1)$	0	0	1	0	7
(38)	$(0, 0)$	0	0	0	0	0

(証明)　$(GL(7), 目)$ は10個の orbits をもち，その代表点は以下の通り（[2]）、x_i は i-codimensional orbit の代表点を表わす。
$x_0 = 234+567+1\cdot(25+36+47)$, $x_1 = 235+346+1\cdot(27-45)$, $x_4 = 134+256+127$, $x_7 = 234+1\cdot(25+36+47)$, $x_9 = 123+456$, $x_{10} = 126-135+234$, $x_{14} = 1\cdot(25+36+47)$, $x_{15} = 1\cdot(24+35)$, $x_{22} = 123$, $x_{35} = 0$.

<u>(x_0, y) の場合</u>; x_0 における isotropy subgroup は (G_2) ゆえ $(G_2\times GL(1), V(7))$ の軌道分解に帰着し 3つに分解する.（[5]）
$(x_0, 0)\,(x_0, e_1)\,(x_0, e_2)$ i.e. (9)(1)(2)、

<u>(x_1, y) の場合</u>; isotropy subalg. は（[　]），

$$\left(\begin{array}{cc|cc|ccc}
\frac{d}{2}+\alpha+\beta & a_{12} & b_{12} & & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\
a_{21} & \frac{d}{2}-\alpha+\beta & & b_{12} & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 \\
\hline
b_{21} & & \frac{d}{2}+\alpha-\beta & a_{12} & -\gamma_2 & \gamma_7 & -\gamma_1 \\
 & b_{21} & a_{21} & \frac{d}{2}-\alpha-\beta & -\gamma_5 & \gamma_8 & -\gamma_4 \\
\hline
 & & & & -d & 2b_{21} & 2b_{12} \\
 & \multicolumn{2}{c}{O} & & b_{12} & -d+2\beta & 0 \\
 & & & & b_{21} & 0 & -d-2\beta
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \hline y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{array}\right)$$ ゆえ

$y' = \begin{pmatrix} y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix}$ には $GO(3)$ が作用するから，$y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のいずれか.

$y' \neq 0$ なる γ_i たちにより $y_1 = \cdots = y_4 = 0$ 即ち $y = e_5, e_6$、$y' = 0$ のとき
$y'' = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix}$ には $\underset{\square\otimes\square}{GL(1)\times SL(2)\times SL(2)} = \underset{\square}{GL(1)\times SO(4)}$ が作用しているから

$y'' = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$ のいずれか。即ち $y = e_1 + e_4,\ e_1,\ 0$ となり

結局，(3)(4)(5)(7)(12) を得る。

<u>(x_4, y) の場合</u>; isotropy subalg. は以下の通り

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix}-\mathrm{tr}X & \\ & -\mathrm{tr}Y\end{matrix} & \begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{matrix} & \begin{matrix}\alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_3 & \beta_4\end{matrix} & \begin{matrix}\alpha_5\\ \beta_5\end{matrix} \\ \hline & X & & \begin{matrix}\beta_2\\ -\beta_1\end{matrix} \\ \hline & & Y & \begin{matrix}-\alpha_4\\ \alpha_3\end{matrix} \\ \hline & & & \mathrm{tr}(X+Y) \end{array}\right] \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\y_6\\y_7\end{pmatrix} (\varepsilon) \qquad (X, Y \in \mathfrak{gl}(2))$$

$y_7 \neq 0$ なら $y_7 = 1,\ y_1 = \cdots = y_6 = 0$ とできる、即ち $y = e_7$、　$y_7 = 0$ とする、

$y' = \begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}$ には $\underset{\square\otimes 1 + 1\otimes\square}{GL(2)\times GL(2)}$ が作用するから $y' = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$

のいずれかで，$y' \neq 0$ なら $y_1 = y_2 = 0$ とできる、即ち $y = e_3 + e_5,\ e_3,$

e_5，$y' = 0$ のとき $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 即ち $e_1+e_2, e_2, e_1, 0$

ところが $(u_1 \leftrightarrow u_2,\ u_3 \leftrightarrow u_5,\ u_4 \leftrightarrow u_6,\ u_7 \leftrightarrow -u_7)$ なる変換によって

$(x_4, e_1) \sim (x_4, e_2)$, $(x_4, e_3) \sim (x_4, e_5)$ であるから，結局 $y = e_7,$

$e_1 + e_2,\ e_1,\ e_3 + e_5,\ e_3,\ 0$ 即ち (6)(13)(15)(8)(10)(20) に帰着。

<u>(x_7, y) の場合</u>; isotropy subalg. は ([2])

$$\left[\begin{array}{c|c|ccc} \varepsilon & \gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 \\ \hline 0 & X & \begin{matrix}\delta_4\\ \delta_3\\ (\gamma_2+\delta_2)\end{matrix} & \begin{matrix}\gamma_3+\delta_3\\ \delta_5\\ \delta_1\end{matrix} & \begin{matrix}\delta_2\\ \gamma_1+\delta_1\\ \delta_6\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & & -\varepsilon I_3 - {}^tX & \end{array}\right] \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\y_6\\y_7\end{pmatrix} (\eta) \qquad (X \in \mathfrak{sl}(3))$$

よって $y' = \begin{pmatrix}y_5\\y_6\\y_7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$，$y' \neq 0$ なら $y_1 = \cdots = y_4 = 0$ として可, i.e. $y = e_5$.

$y' = 0$ なら $y'' = \begin{pmatrix}y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$，$y'' \neq 0$ なら $y_1 = 0$ として可, i.e. $y = e_2$

$y'' = 0$ なら $y_1 = 1$ or 0, i.e. $y = e_1$ or 0，結局 $y = e_5, e_2, e_1, 0$

即ち (11)(16)(21)(23) のいずれかである。

<u>(x_9, y)の場合;</u> isotropy subalg. は([2])

$$\left(\begin{array}{c|c|c} X & & Z \\ \hline & Y & W \\ \hline & & \varepsilon \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \hline y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ \hline y_7 \end{array}\right)^{(\eta)} \qquad (X, Y \in \mathfrak{sl}(3))$$

$y_7 \neq 0$ なる Z, W により $y_1 = \cdots = y_6 = 0$ とできる. 即ち $y \sim e_7$.

$y_7 = 0$ のとき $y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_6 \end{pmatrix}$ には $\underset{\square\otimes 1 + 1\otimes\square}{SL(3)\times SL(3)}$ が作用するから $y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (0)$,

i.e. $y = e_1 + e_4, e_1, e_4, 0$ のいずれか。然るに $1 \leftrightarrow 4$, $2 \leftrightarrow 5$, $3 \leftrightarrow 6$

なる変換により $(x_9, e_4) \sim (x_9, e_1)$. よって $y = e_7, e_1 + e_4, e_1, 0$

即ち (14), (17), (22), (27).

<u>(x_{10}, y)の場合;</u> isotropy subalg. は([2]),

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \varepsilon I_3 + X & B & C \\ \hline 0 & -2\varepsilon I_3 + X & F \\ \hline 0 & 0 & \eta \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \hline y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ \hline y_7 \end{array}\right)^{(\delta)} \qquad (\operatorname{tr} B = 0, X \in \mathfrak{sl}(3))$$

$y_7 \neq 0$ なる C, F により $y_1 = \cdots = y_6 = 0$ とできる. 即ち $y \sim e_7$.

$y_7 = 0$ なる $y' = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ or (0), $y' \neq 0$ なる B により $y_1 = y_2 = y_3 = 0$

とできる. 即ち $y \sim e_4$. $y' = 0$ なる $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ or 0 即ち $y \sim e_1, 0$.

即ち $y \sim e_7, e_4, e_1, 0$ i.e. (18) (19) (24) (28).

<u>(x_{14}, y)の場合;</u> isotropy subalg. は([2]),

$$\left(\begin{array}{c|c} -2\varepsilon & Y \\ \hline 0 & \varepsilon I_6 + X \end{array}\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_7 \end{pmatrix}^{(\eta)} \qquad (X \in Sp(3))$$, Prop 5 (I) により

$y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ or (0). $y' \neq 0$ なる Y により $y_1 = 0$ i.e. $y \sim e_2$,

$y' = 0$ なる $y_1 = 1$ or 0 i.e. $y \sim e_1, 0$. i.e. (25) (30) (31).

(x_{15}, y)の場合; isotropy subalg. は([2])

$$\left(\begin{array}{c|c|c} -2\varepsilon & w & v \\ 0 & \varepsilon I_4+X & Z \\ \hline 0 & 0 & \eta I_2+Y \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_5 \\ \hline y_6 \\ y_7 \end{array}\right)^{(\eta)} \qquad (X\in Sp(2),\ Y\in sl(2))$$

$y'=\begin{pmatrix} y_6 \\ y_7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ or (0), $y'\neq 0$ ならv, Zで $y_1=\cdots=y_5=0$ i.e. $y\sim e_6$.

$y'=(0)$のとき Prop 5 (I) により $y''=\begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots \\0\end{pmatrix}$ or (0).

$y''\neq 0$ なら $y_1=0$ (wによる) とでき $y\sim e_2$, $y''=0$ なら $y_1=1$ or 0

i.e. $y\sim e_1, 0$ 結局 $y\sim e_6, e_2, e_1, 0$ 即ち (26), (29) (32) (33).

(x_{22}, y)の場合; isotropy subalg. は([2]),

$$\left(\begin{array}{c|c} X & Z \\ \hline 0 & \varepsilon I_4+Y \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \hline y_4 \\ \vdots \\ y_7 \end{array}\right)^{(\eta)} \qquad (X\in sl(3),\ Y\in sl(3))$$

ゆえ $\begin{pmatrix} y_4 \\ \vdots \\ y_7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ or (0), $\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots \\0\end{pmatrix}$のとき Z により $y_1=y_2=y_3=0$, i.e. $y\sim e_4$

$\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\0\end{pmatrix}$のとき $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ or (0) i.e. $y\sim e_1, 0$, 結局 (34) (35) (36).

$(x_{35}, y)=(0, y)$の場合; この場合 $y\sim e_1, 0$ 即ち (37) (38).

尚, $\varphi(x)=(\varphi_{ij}(x))$は, 計算すれば,

$$\varphi(x_0)=\left(\begin{array}{c|c|c} -6 & & \\ \hline & & 3I_3 \\ \hline & -3I_3 & \end{array}\right),\quad \varphi(x_1)=\begin{pmatrix} & & & 3 & & & \\ & & -3 & & & & \\ & -3 & & & & & \\ 3 & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix},\quad \varphi(x_4)=\begin{pmatrix} & 3 & & & & & \\ 3 & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x_7)=\varphi(x_{14})=\begin{pmatrix} -6 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix},$$ その他は $\varphi(x)=0$.

Prop 9 の証明終わり //

次に $(GL(1)^2\times Sp(2),$ 日+口 $)$ を考えよう. 日の表現空間は

$V_1=\{X\in M(4);\ {}^tX=-X,\ \mathrm{tr}\,XJ=0\}$, $J=\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_2 \\ \hline -I_2 & 0\end{array}\right)$ である。

即ち $V_1 = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_4 & -x_2 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_5 \\ -x_3 & x_2 & -x_5 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. $X \mapsto AX{}^tA$ $(A \in Sp(2))$ と作用し, $\mathrm{Pf}\,X = x_2^2 + x_1x_5 + x_3x_4$ は, 不変式ゆえ $(Sp(2), 日) = (SO(5), \square) = (Spin\,5$, ベクトル表現) となる。特に $(GL(1)\times Sp(2), 日)$ は3つの軌道に分解し, 代表点として $\begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ をとれる。 $日+\square \ni (X, y) \mapsto (\alpha AX{}^tA, \beta Ay)$ ゆえ,

$XJy \mapsto AX{}^tAJAy = A(XJy)$, $XJ \mapsto AX{}^tAJ(AA^{-1}) = A(XJ)A^{-1}$ ゆえ, $\mathrm{rank}\,X$, $\mathrm{rank}\,y$, $\mathrm{rank}\,XJy$, $r = \begin{cases} 1 & \mathrm{tr}(XJ)^2 \neq 0 \\ 0 & 〃 = 0 \end{cases}$ 等は, 不変量である。

Proposition 10. $(GL(1)^2 \times Sp(2), 日+\square)$ (実は $(GL(1)\times Sp(2), 日+\square)$ で十分) は, 次の8個の軌道に分解する。

	代表点	rank X	rank y	rank XJy	r	dim	isotropy subgp.
(1)	$\left(\begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$	4	1	1	1	9	G_a^2
(2)	$\left(\begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$	2	1	1	0	8	$GL(1)\cdot U(2)$
(3)	$\left(\begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$	4	1	1	0	7	$SL(2)\cdot G_a$
(4)	$\left(\begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$	2	1	0	0	6	$GL(1)\cdot U(4)$
(5)	$\left(\begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}\right)$	4	0	0	0	5	$SL(2)\times SL(2)$
(6)	$\left(\begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}\right)$	2	0	0	0	4	$(GL(1)\times SL(2))\cdot G_a^3$
(7)	$\left(\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$	0	1	0	0	4	$(GL(1)\times SL(2))\cdot U(3)$
(8)	$\left(\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}\right)$	0	0	0	0	0	$GL(1)\times Sp(2)$

(証明) (I) $\begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & \end{pmatrix}$ における $GL(1)\times Sp(2)$ の isotropy subalgebra は

$$(0)\oplus\left[\begin{array}{cc|cc} a_1 & a_{12} & b_1 & b_{12} \\ a_{21} & -a_1 & b_{12} & b_2 \\ \hline -b_2 & b_{12} & -a_1 & -a_{21} \\ b_{12} & -b_1 & -a_{12} & a_1 \end{array}\right] \cong \underset{\square+\square}{\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)} \quad \text{ゆえ}\ y\sim \underset{4\text{次元}}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{2\text{次元}} \underset{0\text{次元}}{\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}}$$

の4つにわかれる。しかし $A=\left(\begin{array}{cc|cc} & -1 & & \\ 1 & & & 0 \\ \hline & & & 1 \\ 0 & & -1 & \end{array}\right)$ の

作用で $\left(A\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \\ & & & 1 \\ & & -1 & \end{pmatrix}{}^tA,\ A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \\ & & & 1 \\ & & -1 & \end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ となるから，結局

$y\sim\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$ 即ち (1)(3)(5)．

(II) $\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \\ & & \end{pmatrix}$ における isotropy subalgebra は

$$(-a_1-a_2)\oplus\left[\begin{array}{cc|cc} a_1 & a_{12} & b_1 & b_{12} \\ a_{21} & a_2 & b_{12} & b_2 \\ \hline & & -a_1 & -a_{21} \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & -a_{12} & -a_2 \end{array}\right]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}, \quad \text{よって}\ \begin{pmatrix}y_3\\y_4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ \text{or}\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}y_3\\y_4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ なる b_i, b_{12} により $y_1=y_2=0$ として可 即ち(2)．

$\begin{pmatrix}y_3\\y_4\end{pmatrix}\sim(0)$ なる $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ i.e. (4), (6)．

(III) $X=0$ なる $y\sim\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$ i.e. (7)(8)．

(Prop 10 の証明終) //

次に $(GL(1)^2\times Sp(3),\ \text{目}+\square)$ を考える。$(GL(6),\ \text{目},\ V(20))$ を $Sp(3)(\subset GL(6))$ に制限すると，目+□ と分解するのである。目の base は $u_i\wedge u_j\wedge u_k$ を ijk と略記する時，$\omega_1=123$, $\omega_2=456$, $\omega_3=234$, $\omega_4=156$, $\omega_5=135$, $\omega_6=246$, $\omega_7=126$, $\omega_8=345$, $\omega_9=125-136$, $\omega_{10}=245-346$, $\omega_{11}=124+236$, $\omega_{12}=145+356$, $\omega_{13}=134-235$, $\omega_{14}=146-256$ である。$(GL(1)\times Sp(3),\ \text{目})$ は5つの軌道に分解し，$x_0=123+456$, $x_1=126+(134-235)$, $x_4=134-235$, $x_7=123$, $x_{14}=0$ がその代表点である([2])。

Proposition 11 $(GL(1)^2 \times Sp(3), \text{目}+\text{口}, V(14) \oplus V(6))$ は 19 個の軌道をもつ。

	代表点	次元
(1)	$(123+456,\ e_1+e_4)$	20
(2)	$(123+456,\ e_1+e_5)$	19
(3)	$(126+(134-235),\ e_6)$	19
(4)	$(126+(134-235),\ e_5)$	18
(5)	$(123+456,\ e_1)$	17
(6)	$(126+(134-235),\ e_3)$	16
(7)	$((134-235),\ e_6)$	16
(8)	$(126+(134-235),\ e_1)$	15
(9)	$((134-235),\ e_1+e_2)$	15
(10)	$(123+456,\ 0)$	14
(11)	$(126+(134-235),\ 0)$	13
(12)	$((134-235),\ e_1)$	13
(13)	$(123,\ e_4)$	13
(14)	$((134-235),\ e_3)$	11
(15)	$((134-235),\ 0)$	10
(16)	$(123,\ e_1)$	10
(17)	$(123,\ 0)$	7
(18)	$(0,\ e_1)$	6
(19)	$(0,\ 0)$	0

（証明） $x_0=123+456$ における isotropy subalgebra は

$\left\{\left[\begin{array}{c|c} A & 0\\ \hline 0 & -{}^tA\end{array}\right];\ A\in \mathfrak{sl}(3)\right\}$ 従って これが $y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_6\end{pmatrix}$ に作用すれば，

Prop 4 (II) により $y\sim e_1+e_4,\ e_1+e_5,\ e_1,\ e_4,\ 0$.　　ここで

$$(x_0, e_4)\ \overset{\left(\begin{smallmatrix} & I_3\\ -I_3 & \end{smallmatrix}\right)\in Sp(3)}{\sim}\ (-123+456, e_1)\ \overset{\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{-1} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{-1}}\end{smallmatrix}\right)\in Sp(3)}{\sim}\ (-\sqrt{-1}\,123-\sqrt{-1}\,456,\ e_1)$$

$\overset{\sqrt{-1}\in GL(1)}{\sim}$ $(123+456, e_1)$ ゆえ，$y\sim e_1+e_4,\ e_1+e_5,\ e_1,\ 0$ 即ち (1)(2)(5)(10).

$x_1=126+(134-235)$ における isotropy subalg. は ([2])

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -d+\alpha & & \beta & b_1 & b_{12} & b_{13}\\ & -d-\alpha & \gamma & b_{12} & b_2 & b_{23}\\ \gamma & \beta & -d & b_{13} & b_{23} & 2b_{12}\\ \hline & & & d-\alpha & & -\gamma\\ & 0 & & & d+\alpha & -\beta\\ & & & -\beta & -\gamma & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} y_1\\ y_2\\ y_3\\ \hline y_4\\ y_5\\ y_6\end{array}\right)\ (\varepsilon)$$

ゆえ，$y'=\begin{pmatrix}y_4\\ y_5\\ y_6\end{pmatrix}$ には

GO(3) が作用しており，$y'\sim\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ となる。b_{ij}, b_i たちにより，$y'\neq 0$ なら $y_1=y_2=y_3=0$ にできる。即ち $y\sim e_6, e_5$.

$y'=0$ のとき，$y''=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$ に GO(3) が作用し，$y''\sim\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$

i.e. $y\sim e_3, e_1, 0$. 結局 (3)(4)(6)(8)(11) を得る。

$x_4=(134-235)$ における isotropy subalg. は ([2])

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_1 & & & b_1 & & \beta\\ & \alpha_2 & & & b_2 & \delta\\ \alpha & \gamma & -d & \beta & \delta & \varepsilon\\ \hline c_1 & & & -\alpha_1 & & -\alpha\\ & c_2 & & & -\alpha_2 & -\gamma\\ & & & & & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} y_1\\ y_2\\ y_3\\ \hline y_4\\ y_5\\ y_6\end{array}\right)\ (\varepsilon)$$

ゆえ，$y_6\neq 0$ なら $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ により $y_1=\cdots=y_5=0$, i.e., $y\sim e_6$.

$y_6=0$ とする. $y_1=y_2=y_4=y_5=0$ なら $y_3=0$ or 1 とできる. 即ち $y\sim 0, e_3$.

y_1,y_2,y_4,y_5 のどれかが $\neq 0$ ならば，$y_3=0$ として可、そのとき，

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_4\\ y_5\end{pmatrix}\mapsto\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha_1 & & b_1 & \\ & \alpha_2 & & b_2\\ \hline c_1 & & -\alpha_1 & \\ & c_2 & & -\alpha_2\end{array}\right)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_4\\ y_5\end{pmatrix}$$ i.e. $\underset{\square\otimes 1+1\otimes\square}{SL(2)\times SL(2)}$ ゆえ 4つの軌道にわかれる.

仮定から $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \neq 0$ としているから $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を代表点とする3つの軌道にわかれる。 (x_4, e_2) に $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \in Sp(3)$ を施すと (x_4, e_1) になるから，$(x_4, e_2) \sim (x_4, e_1)$、従って

$y \sim e_6, 0, e_3, e_1+e_2, e_1$ 即ち (7)(15)(14)(9)(12).

<u>$x_7 = 123$</u> における isotropy subalg. は，

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & -{}^tA \end{array}\right) ; A \in \mathfrak{sl}(3), {}^tB = B \right\}$$

$y' = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}$ は $-{}^tA$ により $y' \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ or (0)，

$y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なる B により $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, i.e. $y \sim e_4$ となる.

$y' = 0$ なる $y'' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ は A により $y'' \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ or (0) i.e. $y \sim e_1, 0$

結局，$y \sim e_4, e_1, 0$, 即ち (13)(16)(17).

$x_{14} = 0$ のところでは $y \sim 0$ or e_1 即ち (19), (18) //Prop 11.

次に ($GL(1)^2 \times Spin\,8$, 半スピン表現 $\oplus$ ベクトル表現, $V_1(8) \oplus V_2(8)$) を考えよう。 $Spin\,8$ のリー環 $\mathfrak{o}(8) = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -{}^tA \end{array}\right] ; A \in \mathfrak{gl}(4), {}^tB = -B, {}^tC = -C \right\}$ がベクトル表現で，その(偶)半スピン表現は，$V_1(8) \ni x = x_1 + x_2 e_1 e_2 + x_3 e_1 e_3 + x_4 e_1 e_4 + x_5 e_1 e_2 e_3 e_4 - x_6 e_3 e_4 + x_7 e_2 e_4 - x_8 e_2 e_3$ に対して

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} A_1 & -c_{12} & -c_{13} & -c_{14} & & c_{34} & -c_{24} & c_{23} \\ b_{12} & A_2 & a_{23} & a_{24} & -c_{34} & & -a_{14} & a_{13} \\ b_{13} & a_{32} & A_3 & a_{34} & c_{24} & a_{14} & & -a_{12} \\ b_{14} & a_{42} & a_{43} & A_4 & -c_{23} & -a_{13} & a_{12} & \\ \hline & b_{34} & -b_{24} & b_{23} & -A_1 & -b_{12} & -b_{13} & -b_{14} \\ -b_{34} & & a_{41} & -a_{31} & c_{12} & -A_2 & -a_{32} & -a_{42} \\ b_{24} & -a_{41} & & a_{21} & c_{13} & -a_{23} & -A_3 & -a_{43} \\ -b_{23} & a_{31} & -a_{21} & & c_{14} & -a_{24} & -a_{34} & -A_4 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \quad (\alpha)$$

で与えられる. 但し，

$$A_1 = -\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{2}, \quad A_2 = \frac{a_1+a_2-a_3-a_4}{2}$$

$$A_3 = \frac{a_1-a_2+a_3-a_4}{2}, \quad A_4 = \frac{a_1-a_2-a_3+a_4}{2}$$

(注) 半スピン表現の $e_i e_j$, $e_i e_j e_k e_l$ の e_i とベクトル表現の $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (i$ とは関係ない！

さて(Spin8, 半スピン表現)$\cong$(SO(8), □) (as triplet) ゆえ,
$V_1(8)$は3個の軌道に分解し, 代表点として,

$$\begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0\\ \hline 1\\0\\0\\0 \end{bmatrix} = 1+e_1e_2e_3e_4, \quad \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0\\ \hline 0\\0\\0\\0 \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = 0,$$ をとれる.

$V_1(8)\oplus V_2(8) \ni \tilde{x} = (x, y)$ に対し, $V_1(8), V_2(8)$上の2次不変式を$g_1(x)$, $g_2(y)$とするとき, $r_1 = \begin{cases} 1 & g_1(x)\neq 0 \\ 0 & g_1(x)=0 \end{cases}$, $r_2 = \begin{cases} 1 & g_2(y)\neq 0 \\ 0 & g_2(y)=0 \end{cases}$
$r_1' = \mathrm{rank}\, x$, $r_2' = \mathrm{rank}\, y$, 軌道の次元, 等は不変量である。

Proposition 12. ($GL(1)^2\times Spin8$, 半スピン表現$\oplus$ベクトル表現) は, 10個の軌道に分解する。

代表点	r_1	r_2	r_1'	r_2'	dim
(1) $(1+e_1e_2e_3e_4,\ e_1+e_5)$	1	1	1	1	16
(2) $(1+e_1e_2e_3e_4,\ e_1)$	1	0	1	1	15
(3) $(1,\ e_1+e_5)$	0	1	1	1	15
(4) $(1,\ e_1)$	0	0	1	1	14
(5) $(1,\ e_5)$	0	0	1	1	11
(6) $(1+e_1e_2e_3e_4,\ 0)$	1	0	1	0	8
(7) $(0,\ e_1+e_5)$	0	1	0	1	8
(8) $(1,\ 0)$	0	0	1	0	7
(9) $(0,\ e_1)$	0	0	0	1	7
(10) $(0,\ 0)$	0	0	0	0	0

（証明）${}^t(10001000) = 1+e_1e_2e_3e_4$ における isotropy subalg. は

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} & a_{24} & -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_3 & a_{34} & -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_4 & -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 \\ \hline 0 & b_{34} & -b_{24} & b_{23} & -a_1 & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} \\ -b_{34} & 0 & b_{14} & -b_{13} & -a_{12} & -a_2 & -a_{32} & -a_{42} \\ b_{24} & -b_{14} & 0 & b_{12} & -a_{13} & -a_{23} & -a_3 & -a_{43} \\ -b_{23} & b_{13} & -b_{12} & 0 & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & -a_4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \hline y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{array}\right) \ (\alpha)$$

で与えられる。これは Spin7 のスピン表現ゆえ orbits は 3つ，（[5]） 即ち e_1+e_5，e_1，0

即ち (1)(2)(6) を得る。

${}^t(10\cdots0)=1$ における isotropy subalg. は $\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & -{}^tA \end{array}\right]\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_8 \end{bmatrix}$ (α) ゆえ

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ or (0)． $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なる C により $\begin{pmatrix} y_5 \\ \vdots \\ y_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で $y_5=$ 1 or 0 となる。即ち $y \sim e_1+e_5, e_1$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix} \sim (0)$ のとき，$-{}^tA$ により $\begin{pmatrix} y_5 \\ \vdots \\ y_8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ or (0) 即ち $y \sim e_5, 0$

結局 (3)(4)(5)(8) を得る。

$x=0$ なら，y には $GO(8)$ が作用するから，e_1+e_5，e_1，0 を代表点にとれて，(7)(9)(10) を得る。 // Prop 12 の証明終り。

次に（$GL(1)^2 \times Spin7$，スピン表現 ⊕ ベクトル表現）を考える。

$\mathfrak{o}(8) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -{}^tA \end{array}\right) ; {}^tB=-B, {}^tC=-C \right\}$ の元で ${}^t(0001000-1)$ を fix する subalgebra を $u_1 = {}^t(00010001) = e_4+e_8$, $u_2=e_1$, $u_3=u_2$, $u_4=e_3$, $u_5=e_5$, $u_6=e_6$, $u_7=e_7$ で表現すると Spin7 のベクトル表現のリー環

$$\mathfrak{o}(7) = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} & -c_{14} & -c_{24} & -c_{34} & -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} \\ \hline 2b_{14} & a_1 & a_{12} & a_{13} & 0 & b_{12} & b_{13} \\ 2b_{24} & a_{21} & a_2 & a_{23} & -b_{12} & 0 & b_{23} \\ 2b_{34} & a_{31} & a_{32} & a_3 & -b_{13} & -b_{23} & 0 \\ \hline 2c_{14} & 0 & c_{12} & c_{13} & -a_1 & -a_{21} & -a_{31} \\ 2c_{24} & -c_{12} & 0 & c_{23} & -a_{12} & -a_2 & -a_{32} \\ 2c_{34} & -c_{13} & -c_{23} & 0 & -a_{13} & -a_{23} & -a_3 \end{array}\right) \right\}$$

が得られ，そのスピン表現は

$$\begin{pmatrix} A_1' & -c_{12} & -c_{13} & -c_{14} & 0 & c_{34} & -c_{24} & c_{23} \\ b_{12} & A_2' & a_{23} & b_{24} & -c_{34} & 0 & -b_{14} & a_{13} \\ b_{13} & a_{32} & A_3' & b_{34} & c_{24} & b_{14} & 0 & -a_{12} \\ b_{14} & -c_{24} & -c_{34} & A_4' & -c_{23} & -a_{13} & a_{12} & 0 \\ 0 & b_{34} & -b_{24} & b_{23} & -A_1' & -b_{12} & -b_{13} & -b_{14} \\ -b_{34} & 0 & -c_{14} & -a_{31} & c_{12} & -A_2' & -a_{32} & c_{24} \\ b_{24} & c_{14} & 0 & a_{21} & c_{13} & -a_{23} & -A_3' & c_{34} \\ -b_{23} & a_{31} & -a_{21} & 0 & c_{14} & -b_{24} & -b_{34} & -A_4' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix}$$

で与えられる。

但し $V(8) \ni x = x_1 + x_2 e_1e_2 + x_3 e_1e_3 + x_4 e_1e_4 + x_5 e_1e_2e_3e_4 - x_6 e_3e_4 + x_7 e_2e_4 - x_8 e_2e_3$

但し、 $A_1' = -\frac{a_1+a_2+a_3}{2}$, $A_2' = \frac{a_1+a_2-a_3}{2}$, $A_3' = \frac{a_1-a_2+a_3}{2}$, $A_4' = \frac{a_1-a_2-a_3}{2}$

さて $V(8) \oplus V(7) \ni (x, y)$ に対し、$V(8)$ 上の2次不変式を $Q(x)$, $V(7)$ 上の2次不変式を $q(y)$, $r = \begin{cases} 1 & Q(x) \neq 0 \\ 0 & Q(x) = 0 \end{cases}$, $r' = \begin{cases} 1 & q(x) \neq 0 \\ 0 & q(x) = 0 \end{cases}$ とおく。

Prop. 13.

	代表点	r	r'	rank x	rank y	dim
(1)	$(1+e_1e_2e_3e_4,\ u_1)$	1	1	1	1	15
(2)	$(1+e_1e_2e_3e_4,\ u_2)$	1	0	1	1	14
(3)	$(1,\ u_2+u_5)$	0	1	1	1	14
(4)	$(1,\ u_2)$	0	0	1	1	13
(5)	$(1,\ u_1)$	0	1	1	1	11
(6)	$(1,\ u_5)$	0	0	1	1	10
(7)	$(1+e_1e_2e_3e_4,\ 0)$	1	0	1	0	8
(8)	$(1,\ 0)$	0	0	1	0	7
(9)	$(0,\ u_1)$	0	1	0	1	7
(10)	$(0,\ u_2)$	0	0	0	1	6
(11)	$(0,\ 0)$	0	0	0	0	0

$(GL(1)^2 \times Spin\,7$, スピン表現 $\oplus$ ベクトル表現, $V(8) \oplus V(7))$ の軌道分解

（証明）（$GL(1)\times Spin\,7$, スピン表現, $V(8)$）は３つの軌道に分解し $1+e_1e_2e_3e_4$, 1, 0 がその代表点である。

$\underline{1+e_1e_2e_3e_4}$ における isotropy subgroup は (G_2)（[1]）ゆえ３つの軌道に分解し（[5]），$u_1, u_2, 0$ がその代表点，即ち (1)(2)(7)．　$\underline{1}$ での isotropy subalgebra は

$$\left[\begin{array}{c|ccc|ccc} 0 & -c_{14} & -c_{24} & -c_{34} & & 0 & \\ \hline & a_1 & a_{12} & a_{13} & & & \\ 0 & a_{21} & a_2 & a_{23} & & 0 & \\ & a_{31} & a_{32} & a_3 & & & \\ \hline 2c_{14} & 0 & c_{12} & c_{13} & -a_1 & -a_{21} & -a_{31} \\ 2c_{24} & -c_{12} & 0 & c_{23} & -a_{12} & -a_2 & -a_{32} \\ 2c_{34} & -c_{13} & -c_{23} & 0 & -a_{13} & -a_{23} & -a_3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} \ (\varepsilon)$$

で与えられる。

$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ or (0) で，$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なら，c_{14}, c_{12}, c_{13} により，$y_1=y_6=y_7=0$ とできる。$y_5=1$ or 0 即ち $y\sim u_2+u_5$, u_2．

$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=0$ のとき，$y_1=1$ or 0．$y_1=1$ のとき，c_{14}, c_{24}, c_{34} により，$y_5=y_6=y_7=0$ 即ち $y\sim u_1$．$y_1=0$ なら $\begin{pmatrix} y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ or (0) 即ち $y\sim u_5, 0$．　結局 (3)(4)(5)(6)(8) を得る。

$x=0$ なら，$V(7)$ には $GO(7)$ が作用するから，３つの軌道にわかれ代表点として，$u_1, u_2, 0$ をとれる。即ち，(9)(10)(11). //

（Prop 13 の証明終り）

次に（$GL(1)^2\times Spin(10)$, 半スピン表現⊕ベクトル表現, $V(16)\oplus V(10)$）を考えよう。（（$GL(1)\times$）$Spin(10)$, 半スピン表現）は，３つの軌道に分解し，$x_0=1+e_1e_2e_3e_4$, $x_5=1$, $x_{16}=0$ がその代表点である。

（$Spin(10)$, 半スピン表現）≅（$SO(10)$, □）ゆえ，その２次の

不変式を $g(y)$ とし, $r=\begin{cases}1 & g(y)\neq 0\\ 0 & g(y)=0\end{cases}$ とすれば, これは不変量である。

Proposition 14. ($GL(1)^2\times Spin(10)$, 半スピン表現⊕ベクトル表現) は, 13個の軌道に分解する。

	代表点	r	rank x	rank y	dim
(1)	$(1+e_1e_2e_3e_4,\ e_5+e_{10})$	1	1	1	26
(2)	$(1+e_1e_2e_3e_4,\ e_1+e_6)$	1	1	1	25
(3)	$(1+e_1e_2e_3e_4,\ e_5)$	0	1	1	25
(4)	$(1+e_1e_2e_3e_4,\ e_1)$	0	1	1	24
(5)	$(1,\ e_1+e_6)$	1	1	1	21
(6)	$(1,\ e_1)$	0	1	1	20
(7)	$(1+e_1e_2e_3e_4,\ e_{10})$	0	1	1	17
(8)	$(1+e_1e_2e_3e_4,\ 0)$	0	1	0	16
(9)	$(1,\ e_6)$	0	1	1	16
(10)	$(1,\ 0)$	0	1	0	11
(11)	$(0,\ e_1+e_6)$	1	0	1	10
(12)	$(0,\ e_1)$	0	0	1	9
(13)	$(0,\ 0)$	0	0	0	0

(証明), $(x_{16}, y)=(0, y)$ の場合, $(GO(10), \square)$ に帰着し, e_1+e_6, e_1, 0, を代表元にする3つの軌道にわかれる。即ち (11), (12), (13) を得る。

$x_5 = 1$ における isotropy subalg. は

$$\left(\left(\tfrac{\mathrm{Tr}A}{2}\right)\oplus\right)\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & -{}^tA \end{array}\right]\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \\ y_6 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix}^{(\varepsilon)} \quad ({}^tC=-C)$$

ゆえ $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix}$ には $GL_{\square}(5)$ が作用し

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ or (0). $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ の時, C により $y_7 = \cdots = y_{10} = 0$

とでき, $y_6 = 1$ or 0 に応じて, $y \sim e_1 + e_6$, e_1 となる。

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix} = (0)$ のとき, $\begin{pmatrix} y_6 \\ \vdots \\ y_{10} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ or (0) 即ち $y \sim e_6, 0$

即ち (5)(6)(9)(10)を得る。

$x_0 = 1 + e_1e_2e_3e_4$ における isotropy subalg. は,

$$((a)\oplus)\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
a_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\
a_{21} & a_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & -\alpha_1 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_3 & a_{34} & a_{35} & -\alpha_2 & -\beta_1 & 0 & \beta_3 & 0 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_4 & a_{45} & -\alpha_3 & -\beta_2 & -\beta_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & \beta_3 & -\beta_2 & \beta_1 & c_{15} & -a_1 & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & 0 \\
-\beta_3 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 & c_{25} & -a_{12} & -a_2 & -a_{32} & -a_{42} & 0 \\
\beta_2 & -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 & c_{35} & -a_{13} & -a_{23} & -a_3 & -a_{43} & 0 \\
-\beta_1 & \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & c_{45} & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & -a_4 & 0 \\
-c_{15} & -c_{25} & -c_{35} & -c_{45} & 0 & -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & -2a
\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \hline y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \end{array}\right)^{(\varepsilon)}$$

となる.

$y_5 \neq 0$ なら, $a_{15} \sim a_{45}$, $c_{15} \sim c_{45}$ により y_{10} 以外すべて 0 にでき,

$y_5 = 1$, $y_{10} = 1$ or 0 として可, 即ち $y \sim e_5 + e_{10}$, e_5, i.e. (1)(3)

$y_5 = 0$ とする。 $y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \\ y_6 \\ \vdots \\ y_9 \end{pmatrix}$ には Spin7 がスピン表現で作用す

るから $y' \sim \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, (0)$ のいずれかで $y' \neq 0$ なら G_5 により $y_{10} = 0$

$y' = 0$ なら $y_{10} = 1$ or 0, 即ち $y \sim e_1 + e_6$, e_1, e_{10}, 0, 即ち

(2)(4)(7)(8). // Prop 14 の証明終り.

$(GL(1)^2 \times Spin(12)$, 半スピン表現 $\oplus$ ベクトル表現, $V(32) \oplus V(12))$ を考える。

$(GL(1) \times Spin(12)$, (偶)半スピン表現) は5つの orbit に分解し,

$x_0 = 1 + e_1e_2e_3e_4e_5e_6$, $x_1 = 1 + e_2e_3e_5e_6 + e_1e_3e_4e_6$, $x_7 = 1 + e_2e_3e_5e_6$

$x_{16} = 1$, $x_{32} = 0$ がその代表点である。$(Spin(12)$, 半スピン表現) の4次不変式を $Q(x)$, $(SO(12), \square)$ の2次不変式を $q(y)$,

$R = \begin{cases} 1 & Q(x) \neq 0 \\ 0 & Q(x) = 0 \end{cases}$, $r = \begin{cases} 1 & q(y) \neq 0 \\ 0 & q(y) = 0 \end{cases}$ とおく。

Proposition 15. $(GL(1)^2 \times Spin(12)$, 半スピン表現 $\oplus$ ベクトル表現) は, 次の軌道に分解する。(但し, (5)と(6)が同一の軌道に属す可能性があり, 今のところ不明)

	代表点	R	r	rank x	rank y	dim
(1)	$(1+e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ e_1+e_7)$	1	1	1	1	44
(2)	$(1+e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ e_1+e_8)$	1	0	1	1	43
(3)	$(1+e_2e_3e_5e_6+e_1e_3e_4e_6,\ e_1+e_7)$	0	1	1	1	43
(4)	$(1+e_2e_3e_5e_6+e_1e_3e_4e_6,\ e_1)$	0	0	1	1	42
(5)	$(1+e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ e_1)$	1	0	1	1	38 } ?
(6)	$(1+e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ e_7)$	1	0	1	1	38 }
(7)	$(1+e_2e_3e_5e_6+e_1e_3e_4e_6,\ e_7)$	0	0	1	1	37
(8)	$(1+e_2e_3e_5e_6,\ e_1+e_7)$	0	1	1	1	37
(9)	$(1+e_2e_3e_5e_6,\ e_1)$	0	0	1	1	36
(10)	$(1+e_2e_3e_5e_6,\ e_2+e_8)$	0	1	1	1	35
(11)	$(1+e_2e_3e_5e_6,\ e_2)$	0	0	1	1	34

代表点	R	r	rank x	rank y	dim
(12) $(1+e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ 0)$	1	0	1	0	32
(13) $(1+e_2e_3e_5e_6+e_1e_3e_4e_6,\ 0)$	0	0	1	0	31
(14) $(1,\ e_1+e_7)$	0	1	1	1	28
(15) $(1+e_2e_3e_5e_6,\ e_7)$	0	0	1	1	27
(16) $(1,\ e_1)$	0	0	1	1	27
(17) $(1+e_2e_3e_5e_6,\ 0)$	0	0	1	0	25
(18) $(1,\ e_7)$	0	0	1	1	22
(19) $(1,\ 0)$	0	0	1	0	16
(20) $(0,\ e_1+e_7)$	0	1	0	1	12
(21) $(0,\ e_1)$	0	0	0	1	11
(22) $(0,\ 0)$	0	0	0	0	0

（証明） (x_0, y)の場合， x_0における isotropy subalg. は $\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA\end{pmatrix} ; A\in sl(6)\right\}$ ゆえ5つの orbits (Prop 4 (II)) にわかれ $e_1+e_7,\ e_1+e_8,\ e_1,\ e_7,\ 0$ がその代表点である。即ち(1)(2)(5)(6)(12). 但し $(x_0, e_7)\sim(x_0, e_1)$ の可能性はまだ捨てきれていない。

(x_{16}, y)の場合， x_{16}における isotropy subalg. は $\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & -{}^tA\end{pmatrix} ; {}^tC=-C\right\}$ ゆえ， $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ or (0)， $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ なるCにより $y_7=1$ or 0, $y_8=\cdots=y_{12}=0$ 即ち， $y\sim e_1+e_7,\ e_1$. また $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_6\end{pmatrix}=0$ ならば， $\begin{pmatrix}y_7\\ \vdots\\ y_{12}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ or (0) 即ち， $y\sim e_7,\ 0$， 結局 (14)(16)(18)(19) を得る。

<u>(x_1, y)の場合</u>, x_1における isotropy subalg. は

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
a_1 & a_{12} & 0 & a_{14} & a_{15} & 0 & 0 & 0 & c_{46} & 0 & 0 & c_{34} \\
a_{21} & a_2 & 0 & a_{15} & a_{25} & 0 & 0 & 0 & c_{56} & 0 & 0 & c_{35} \\
a_{31} & a_{32} & a_3 & a_{34} & a_{35} & a_{36} & -c_{46} & -c_{56} & 0 & c_{16} & c_{26} & b_{36} \\
a_{41} & a_{42} & 0 & a_4 & -a_{21} & 0 & 0 & 0 & -c_{16} & 0 & 0 & c_{13} \\
a_{51} & a_{52} & 0 & -a_{12} & a_5 & 0 & 0 & 0 & -c_{26} & 0 & 0 & c_{23} \\
a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_6 & -c_{34} & -c_{35} & -b_{36} & -c_{13} & -c_{23} & 0 \\
\hline
0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & -a_1 & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & -a_{51} & -a_{61} \\
-c_{12} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & -a_{12} & -a_2 & -a_{32} & -a_{42} & -a_{52} & -a_{62} \\
-c_{13} & -c_{23} & 0 & c_{34} & c_{35} & c_{36} & 0 & 0 & -a_3 & 0 & 0 & -a_{63} \\
-c_{14} & -c_{24} & -c_{34} & 0 & c_{45} & c_{46} & -a_{14} & -a_{15} & -a_{34} & -a_4 & a_{12} & -a_{64} \\
-c_{15} & -c_{25} & -c_{35} & -c_{45} & 0 & c_{56} & -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & a_{21} & -a_5 & -a_{65} \\
-c_{16} & -c_{26} & -c_{36} & -c_{46} & -c_{56} & 0 & 0 & 0 & -a_{36} & 0 & 0 & -a_6
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ \hline y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{array}\right) \quad (\varepsilon)$$

さて, $y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_9 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_{12} \end{pmatrix}$ には $S_p(3)$ が作用しているから, $y' \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ の (0)

$y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき $c_{12}, a_{31}, c_{14}, c_{15}, a_{61}$ により $y_7 = 1$ の 0, $y_8 = y_3 = y_{10} = y_{11} = y_6 = 0$ 即ち $y \sim e_1 + e_7$ の e_1.

$y' = (0)$ のとき $y'' = {}^t(y_7\, y_8\, y_3\, y_{10}\, y_{11}\, y_6)$ に $S_p(3)$ が作用するから, $y'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ の (0) 即ち $y \sim e_7, 0$. 即ち (3)(4)(7)(13).

<u>(x_7, y)の場合</u>, x_7における isotropy subalg. は

$$\left(\tfrac{a_1+a_4}{2}\right) \oplus \left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
a_1 & 0 & 0 & a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_{21} & a_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 & c_{56} & 0 & -c_{36} & c_{35} \\
a_{31} & a_{32} & a_3 & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 & -c_{56} & 0 & 0 & c_{26} & -c_{25} \\
a_{41} & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_5 & a_{56} & 0 & c_{36} & -c_{26} & 0 & 0 & c_{23} \\
a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_6 & 0 & -c_{35} & c_{25} & 0 & -c_{23} & 0 \\
\hline
0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & -a_1 & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & -a_{51} & -a_{61} \\
-c_{12} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & 0 & -a_2 & -a_{32} & 0 & -a_{52} & -a_{62} \\
-c_{13} & -c_{23} & 0 & c_{34} & c_{35} & c_{36} & 0 & -a_{23} & -a_3 & 0 & -a_{53} & -a_{63} \\
-c_{14} & -c_{24} & -c_{34} & 0 & c_{45} & c_{46} & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & -a_4 & -a_{54} & -a_{64} \\
-c_{15} & -c_{25} & -c_{35} & -c_{45} & 0 & c_{56} & 0 & -a_{25} & -a_{35} & 0 & -a_5 & -a_{65} \\
-c_{16} & -c_{26} & -c_{36} & -c_{46} & -c_{56} & 0 & 0 & -a_{26} & -a_{36} & 0 & -a_{56} & -a_6
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ \hline y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{array}\right) \quad (\varepsilon)$$

で与えられる.

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_4 \end{pmatrix}$ に $GL(2)$ が作用するから $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のときは, $a_{21} \sim a_{61}$, $c_{12} \sim c_{16}$ により $y_7 = 1$ or 0, $y_2 = \cdots = y_6 = y_8 = \cdots = y_{12} = 0$ 即ち $y \sim e_1 + e_7$, e_1. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0$ のとき,

$y' = {}^t(y_2\, y_3\, y_5\, y_6\, y_8\, y_9\, y_{11}\, y_{12})$ に Spin 7 がスピン表現で作用するから $y' \sim {}^t(10001000)$, ${}^t(10\cdots0)$, 0 の3つに分れる。

$y' \neq 0$ のとき $c_{12}, -c_{24}$ により $y_7 = y_{10} = 0$ として可, 即ち $y \sim e_2 + e_8$, e_2.

$y' = 0$ なら $\begin{pmatrix} y_7 \\ y_{10} \end{pmatrix}$ に $GL(2)$ が作用するから $\begin{pmatrix} y_7 \\ y_{10} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ or (0)

即ち $y \sim e_7$, 0. 結局, (8)(9)(10)(11)(15)(17).

$(x_{32}, y) = (0, y)$ の場合 $(GO(12), \square)$ に帰着し, 3つにわかれる. 即ち $y \sim e_1 + e_7$, e_1, 0 i.e. (20)(21)(22) //

(Prop 15 の証明終り)

参考文献

[1] M. Sato - T. Kimura, Nagoya Math J. Vol 65 (1977)

[2] T. Kimura, Nagoya Math. J. Vol 85 (1982)

[3] T. Kimura, Tsukuba J. Math Vol 5. No 1 (1981)

[4] T. Kimura, A Classification of Prehomogeneous Vector Spaces of Simple Algebraic Groups with Scalar Multiplication, to appear in J. of Alg.

[5] 木村達雄, 東京大学修士論文 (1973)

[6] Pyasetskii, V; Linear Lie group acting with finitely many orbits, Funct. Anal. Appl 9. 351–353 (1975)

[7] V.G. Kac, Concerning the question of description of the orbit space of a linear group,
Uspechi, Mat. Nauk, 30 (1975), 173-174 (in Russian)

[8] V.G. Kac Some Remarks on Nilpotent Orbits,
J. of Alg. 64-1 (1980), 190-213.